

# 3. Modelos, señales y sistemas

## Panorama

- Obtención experimental de modelos
- Respuesta en frecuencia
- Diagramas de Bode

# Obtención experimental de modelos

Muchos sistemas en la práctica pueden describirse aproximadamente con un modelo muy simple, de primer o segundo orden. A menudo estos modelos simples son suficientes para realizar un primer diseño de control.

Estos modelos simples pueden obtenerse mediante ensayos experimentales sobre el sistema. La idea es proponer la estructura apropiada, por ejemplo un primer orden con retardo

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{\tau s + 1},$$

y luego inferir los valores de los parámetros  $K$ ,  $T$ ,  $\tau$  de la respuesta del sistema a lazo abierto del sistema. Es común emplear la respuesta al escalón.

Existen técnicas más avanzadas de estimación de modelo mediante ensayos experimentales, conocidas como técnicas de **identificación de sistemas**.

Estas técnicas permiten estimar en forma optimizada tanto los parámetros como la estructura más apropiada para un modelo del sistema, inclusive para sistemas *inestables a lazo abierto*.

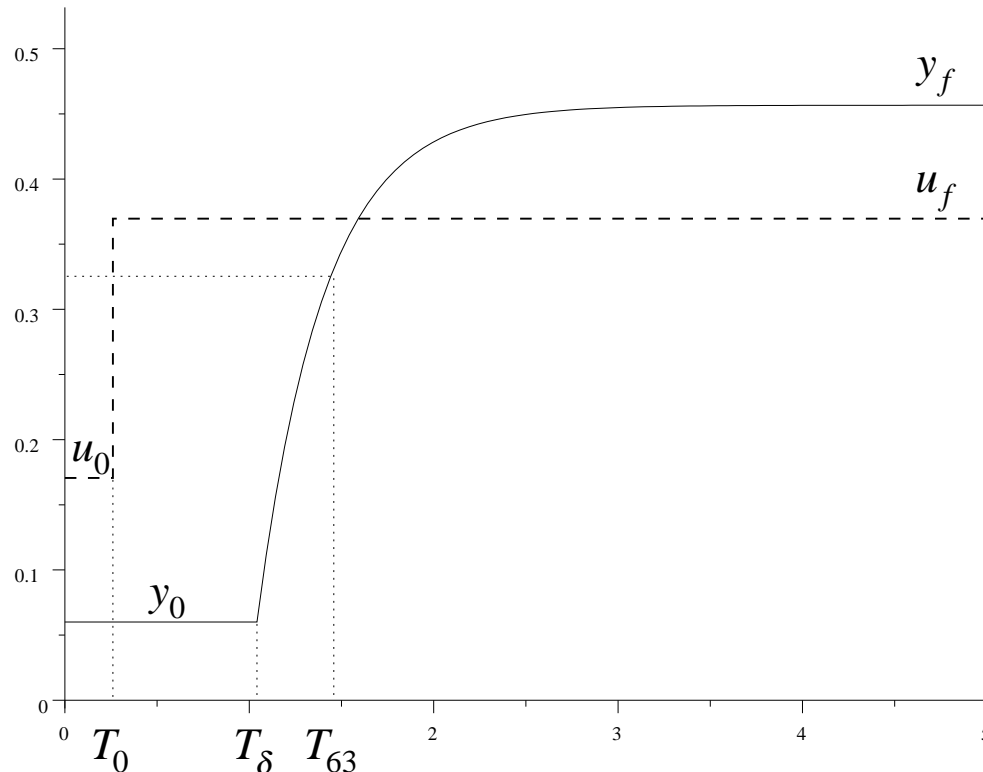
Para un tratamiento actualizado de **identificación de sistemas** ver por ejemplo

- Lennart Ljung, *System Identification*, 2nd edn. Prentice Hall, 1999.

y el **toolbox de identificación** de MATLAB.

Veremos ahora cómo identificar en forma elemental sistemas de primer y segundo orden a partir de la respuesta al escalón.

# Primer orden con retardo



## Medir:

$u_0$  nivel inicial de entrada.

$u_f$  nivel final de entrada.

$y_0$  nivel inicial de salida.

$y_f$  nivel final de salida.

$T_0$  tiempo de cambio de la entrada.

$T_\delta$  tiempo en que la salida comienza a responder.

$T_{63}$  tiempo en que la salida alcanza el 63,2 % de  $y_f - y_0$ .

## Calcular:

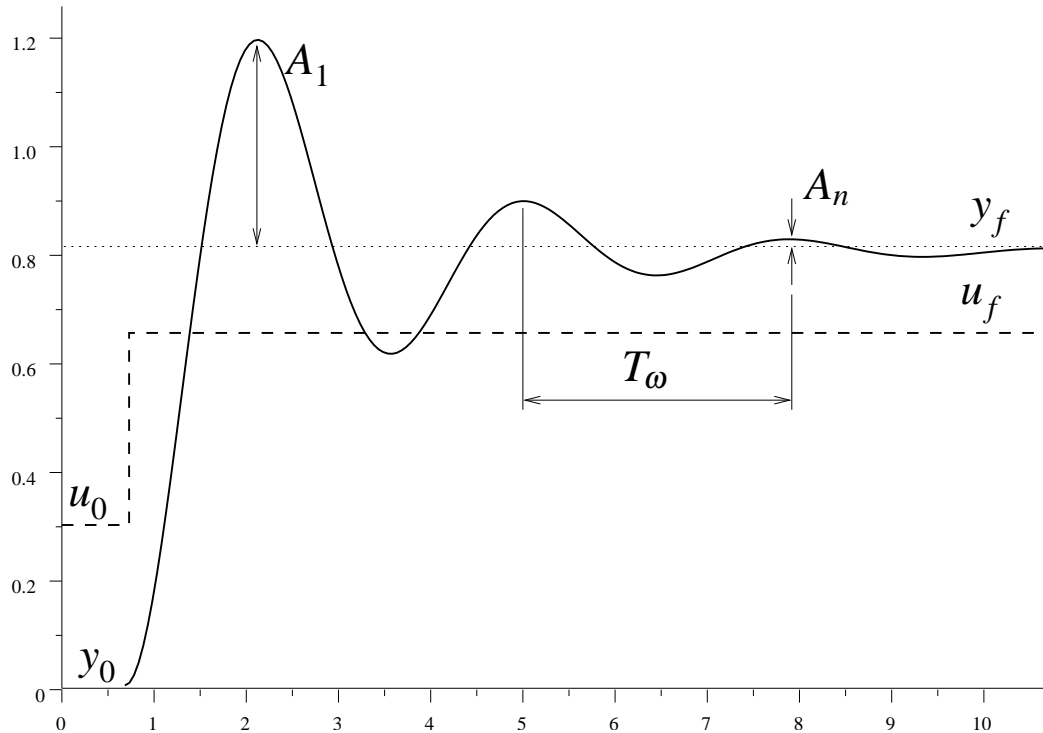
$$\hat{K} = \frac{y_f - y_0}{u_f - u_0}; \quad \hat{\tau} = T_{63} - T_\delta;$$

$$\hat{T}_r = T_\delta - T_0$$

## Transferencia estimada:

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{K} e^{-s\hat{T}_r}}{\hat{\tau}s + 1}$$

# Segundo orden subamortiguado



## Medir:

$u_0$  nivel inicial de entrada.

$u_f$  nivel final de entrada.

$y_0$  nivel inicial de salida.

$y_f$  nivel final de salida.

$A_1$  amplitud de un pico arbitrario.

$A_n$  amplitud del pico No.  $n$  contando desde el pico 1.

$T_\omega$  tiempo entre dos picos sucesivos.

## Calcular:

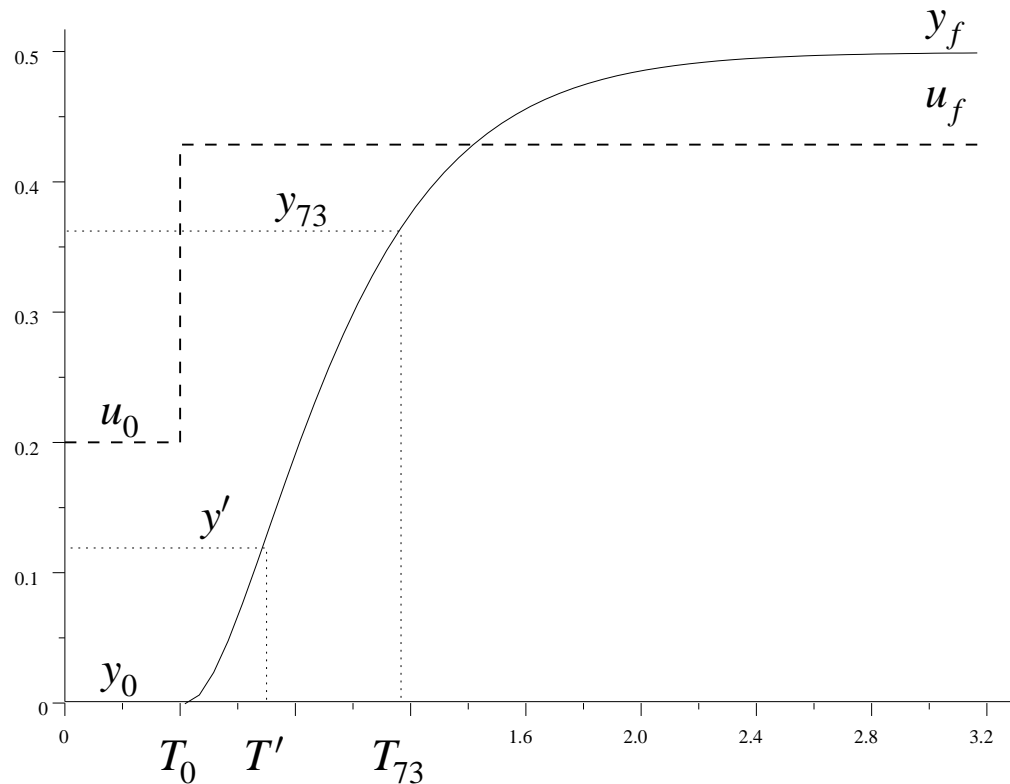
$$\hat{\zeta} = \frac{\frac{1}{n-1} \log(A_1/A_n)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\frac{1}{n-1} \log(A_1/A_n)\right]^2}};$$

$$\hat{T}_n = \frac{T_\omega}{2\pi} \sqrt{1 - \hat{\zeta}^2}; \quad \hat{K} = \frac{y_f - y_0}{u_f - u_0}.$$

## Transferencia estimada:

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}_n^2 s^2 + 2\hat{\zeta}\hat{T}_n s + 1}$$

# Segundo orden sobreamortiguado (Método de Harriott)



## Medir:

$u_0$  nivel inicial de entrada.

$u_f$  nivel final de entrada.

$y_0$  nivel inicial de salida.

$y_f$  nivel final de salida.

$T_0$  tiempo de escalón de entrada.

$T_{73}$  tiempo en que la salida alcanza 73% de  $y_f - y_0$ .

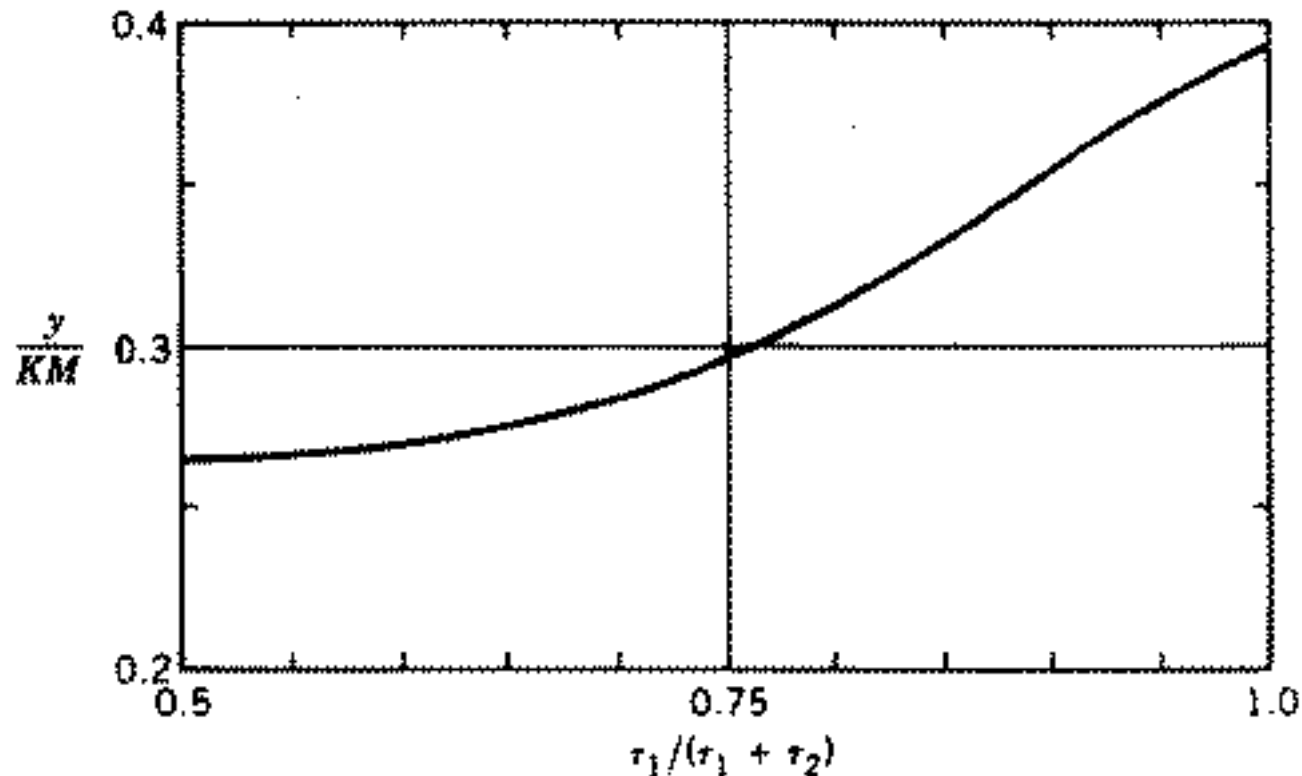
$y'$  nivel de salida en el tiempo

$$T' = T_0 + \frac{T_{73} - T_0}{2,6}.$$

## Calcular:

$$\hat{K} = \frac{y_f - y_0}{u_f - u_0}; \quad \hat{\tau}_{tot} = \frac{T_{73} - T_0}{1,3}; \quad y_{fr} = \frac{y' - y_0}{y_f - y_0}$$

## Obtener $\hat{\tau}_{rat}$ de $y_{fr}$ del gráfico



**Nota:** si  $y_{fr}$  resulta mayor a 0,39 o menor a 0,26, la respuesta es probablemente de segundo orden *subamortiguada*, o de orden mayor.

**Figure 7.6.** Harriot's method: fractional response of overdamped second-order system at  $t/(\tau_1 + \tau_2) = 0.5$

**Calcular**

$$\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_{rat} \hat{\tau}_{tot} \quad y \quad \hat{\tau}_2 = \hat{\tau}_{tot} - \hat{\tau}_1.$$

**Transferencia estimada:**

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{K}}{(\hat{\tau}_1 s + 1)(\hat{\tau}_2 s + 1)}$$

# Respuesta en régimen permanente

La **respuesta en régimen permanente** de un sistema es la señal  $y_{rp}(t)$  a la que tiende la respuesta  $y(t)$  del sistema una vez extinguidos los **transitorios** — es decir, para valores suficientemente grandes de  $t$ ,

$$y(t) \xrightarrow{t \uparrow} y_{rp}(t)$$

El concepto de respuesta en régimen permanente sólo tiene sentido **si el sistema es estable (BIBO)**.

Típicamente, la respuesta en régimen permanente se estudia para entradas de tipo escalón o sinusoidal.



# Respuesta en frecuencia

La respuesta en régimen permanente de un sistema a señales sinusoidales en un rango de frecuencias es lo que se conoce como la **respuesta en frecuencia** del sistema.

El interés de tratar entradas sinusoidales está en que la respuesta del sistema a estas señales contiene información sobre la respuesta a señales más generales.

De hecho, toda señal periódica puede descomponerse en una serie de senos y cosenos, por el Teorema de Fourier. Conociendo la respuesta del sistema a las componentes sinusoidales de la señal de entrada, puede reconstruirse por Fourier la señal de salida.

**Teorema. (Respuesta en RP a entradas sinusoidales)**

Consideremos una función transferencia estable  $G(s)$  de orden  $n$  (o sea, con  $n$  polos, todos ellos con parte real negativa). Entonces, la respuesta en régimen permanente a una entrada

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

es

$$(1) \quad \boxed{y_{rp}(t) = A |G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi(\omega))},$$

donde  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$ , es decir,

$|G(j\omega)|$  : magnitud de  $G(j\omega)$ ,

$\phi(\omega)$  : fase de  $G(j\omega)$ .

## **Demostración:** La entrada sinusoidal puede escribirse

$$(2) \quad A \operatorname{sen}(\omega t) = A \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.$$

Entonces, si obtenemos la respuesta del sistema a las entradas  $u(t) = e^{j\omega t}$  y  $u(t) = e^{-j\omega t}$ , aplicando superposición encontraremos la respuesta a la entrada sinusoidal (2).

La transformada Laplace de  $e^{j\omega t}$  es  $\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \frac{1}{s-j\omega}$ . Así,

$$(3) \quad \begin{aligned} Y(s) &= G(s) \frac{1}{s-j\omega} \\ &= \frac{G(j\omega)}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-p_i}, \quad \text{en fracciones simples,} \end{aligned}$$

donde  $p_i, i = 1 \dots n$  son los polos de  $G(s)$  y  $r_i$  los correspondientes residuos  $r_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s-p_i)G(s)}{s-j\omega}$ .

Antitransformando (3) obtenemos

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} \right\} + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{r_i}{s - p_i} \right\} \\ &= G(j\omega)e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} \\ &\xrightarrow{t \uparrow} G(j\omega)e^{j\omega t} = |G(j\omega)|e^{j(\omega t + \phi(\omega))}.\end{aligned}$$

De igual forma calculamos la respuesta a  $e^{-j\omega t}$ . Superponiendo ambas respuestas se obtiene la ecuación (1), que es lo que se quería demostrar.  $\square$

*La respuesta en régimen permanente de un sistema  $G(s)$  a una senoide de frecuencia  $\omega$  es una senoide de igual frecuencia, con amplitud multiplicada por la magnitud de  $G(j\omega)$  y desfase igual a la fase de  $G(j\omega)$ .*

# Diagramas de Bode

Los diagramas de Bode consisten de un par de gráficas:

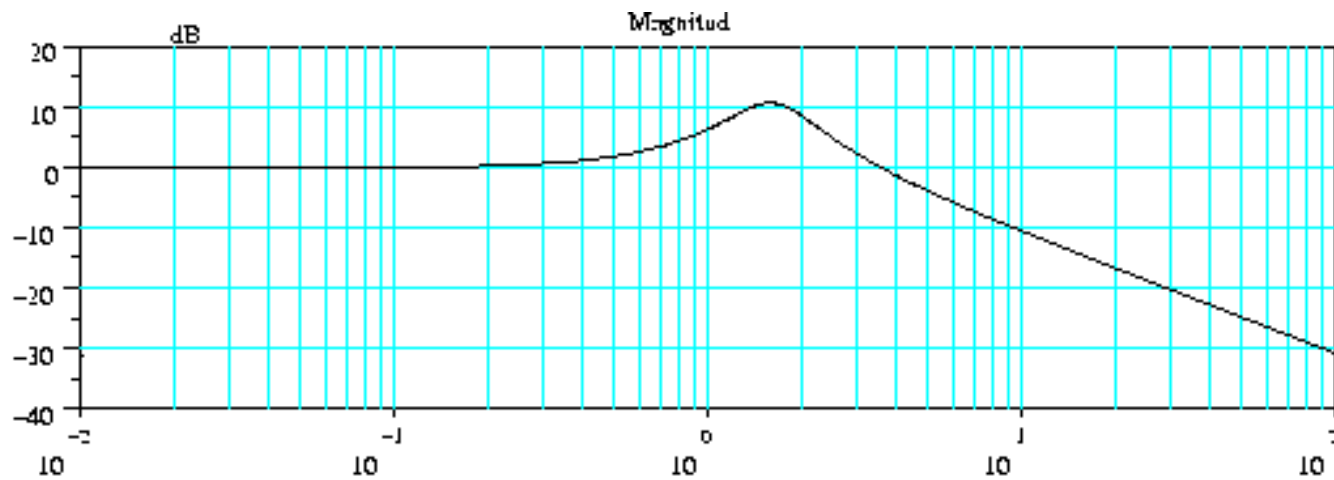
1. La magnitud  $|G(j\omega)|$  versus la frecuencia angular  $\omega$ .
2. La fase  $\phi(\omega)$ , también como función de  $\omega$ .

Los diagramas de Bode se suelen graficar en ejes especiales.

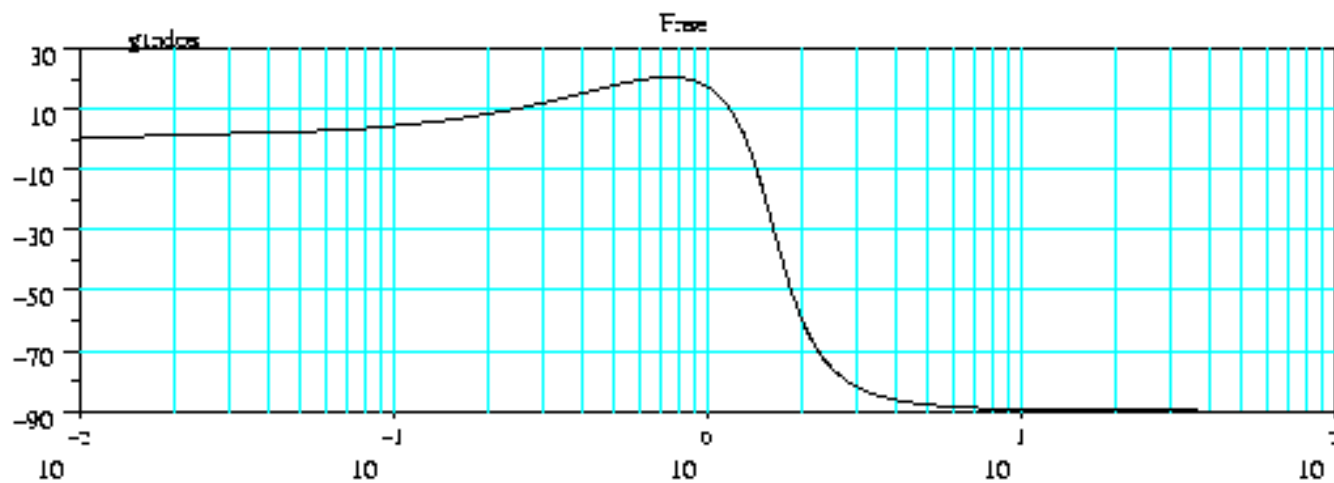
- El eje de abscisas es **logarítmico** en  $\omega$ , es decir, lineal en  $\log(\omega)$ , donde el logaritmo es de **base 10**. Así se consigue una representación compacta sobre un rango amplio de frecuencias. La unidad del eje es **la década**, es decir, la distancia entre  $\omega$  y  $10\omega$  para cualquier valor de  $\omega$ .
- La magnitud de la respuesta en frecuencia se mide en **decibeles** [dB], es decir, unidades de  $20\log|G(j\omega)|$ .
- La fase se mide en escala lineal en radianes o grados.

# Ejemplo:

$$G(s) = \frac{18s + 100}{s^2 + 6,06s + 102,01}$$



H:



H:

— G(s) = (18\*s + 100)/(s^2 + 6.06\*s + 102.01)

# Gráfico aproximado de los diagramas de Bode

Los programas como MATLAB y SCILAB poseen comandos especiales <sup>1</sup> para calcular y graficar diagramas de Bode. Sin embargo, existen reglas muy simples que permiten esbozar estos diagramas prácticamente sin hacer cálculos.

Dada la función transferencia

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (\beta_i s + 1)}{s^k \prod_{i=1}^n (\alpha_i s + 1)}, \quad \text{entonces}$$

$$(4) \quad 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |K| - 20k \log |\omega| \\ + \sum_{i=1}^m 20 \log |\beta_i j\omega + 1| - \sum_{i=1}^n 20 \log |\alpha_i j\omega + 1|$$

---

<sup>1</sup>Por ejemplo: `bode`, `ltiview`.

Por otro lado, la fase de  $G(j\omega)$  resulta

$$(5) \quad \angle G(j\omega) = \angle K - k\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^m \angle(\beta_i j\omega + 1) - \sum_{i=1}^n \angle(\alpha_i s + 1)$$

Así vemos de (4) y (5) que el diagrama de Bode de cualquier función transferencia puede obtenerse sumando y restando magnitudes (en dB) y fases de factores simples.

- Una ganancia simple  $K$  tiene magnitud y fase constantes. El diagrama de magnitud es una línea horizontal en  $20\log|K|$  dB y la fase es una línea horizontal en 0 rad (si  $K > 0$ ).
- El factor  $s^k$  tiene un diagrama de magnitud que es una línea recta con pendiente igual a  $20k$  dB/década, y fase constante igual a  $k\pi/2$ . Esta línea cruza el eje horizontal de 0 dB en  $\omega = 1$ .



- El factor  $\alpha_i s + 1$  tiene un diagrama de magnitud que puede aproximarse asintóticamente de la siguiente manera:
  - para  $|\alpha_i \omega| \ll 1$ ,  $20 \log |\alpha_i j \omega + 1| \approx 20 \log(1) = 0$  dB, es decir, para bajas frecuencias la magnitud es una línea horizontal (la **asíntota de baja frecuencia**).
  - para  $|\alpha_i \omega| \gg 1$ ,  $20 \log |\alpha_i j \omega + 1| \approx 20 \log |\alpha_i \omega|$  dB, es decir, para altas frecuencias la magnitud es una línea recta de pendiente 20 dB/década que corta el eje de 0 dB en  $\omega = |\alpha_i|^{-1}$  (la **asíntota de alta frecuencia**).
  - el diagrama de fase es más complicado. Aproximadamente cambia a lo largo de dos décadas. Una década por debajo de  $|\alpha_i|^{-1}$  la fase es  $\approx 0$  rad. Una década por arriba de  $|\alpha_i|^{-1}$  la fase es  $\approx \text{signo}(\alpha_i) \pi / 2$  rad. Uniendo ambos puntos por una línea recta da  $\approx \text{signo}(\alpha_i) \pi / 4$  para la fase en  $\omega = |\alpha_i|^{-1}$ . Es una aproximación basta.

- Para  $\alpha_i$  complejo,  $a_i = \Re(\alpha_i) + j\Im(\alpha_i)$ , la fase del diagrama de Bode del factor  $(\alpha_i s + 1)$  corresponde a la fase del número complejo  $[1 - \omega\Im(\alpha_i)] + j\omega\Re(\alpha_i)$

**Ejemplo:** Consideremos la función transferencia

$$G(s) = 640 \frac{(s + 1)}{(s + 4)(s + 8)(s + 10)}.$$

Para dibujar la aproximación asintótica del diagrama de Bode primero llevamos a  $G(s)$  a una forma en que los polos y los ceros no aporten ganancia estática,

$$G(s) = 2 \frac{(s + 1)}{(0,25s + 1)(0,125s + 1)(0,1s + 1)}.$$

Usando las reglas aproximadas obtenemos el diagrama siguiente.

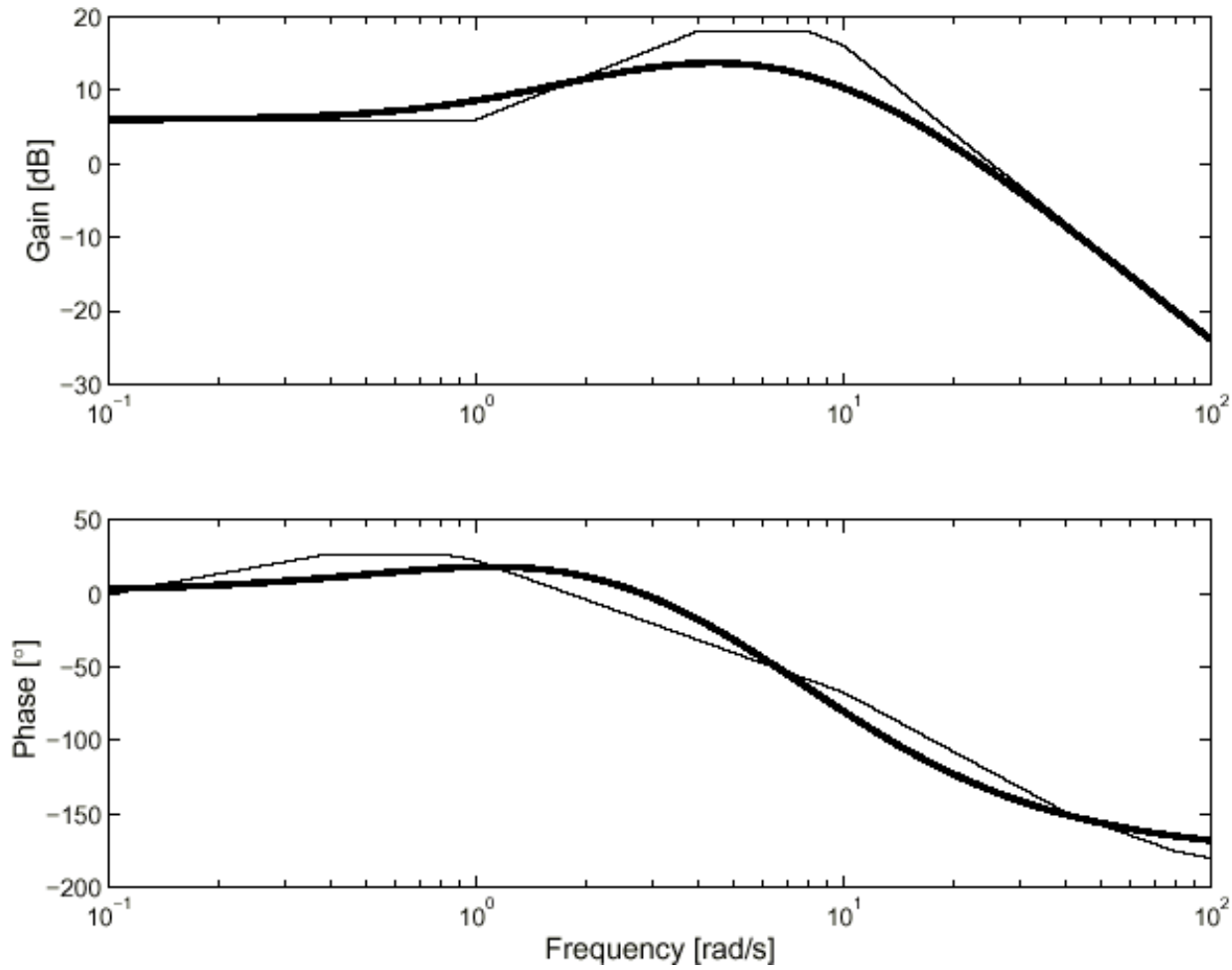


Diagrama de Bode exacto (línea gruesa) y aproximado (línea fina).

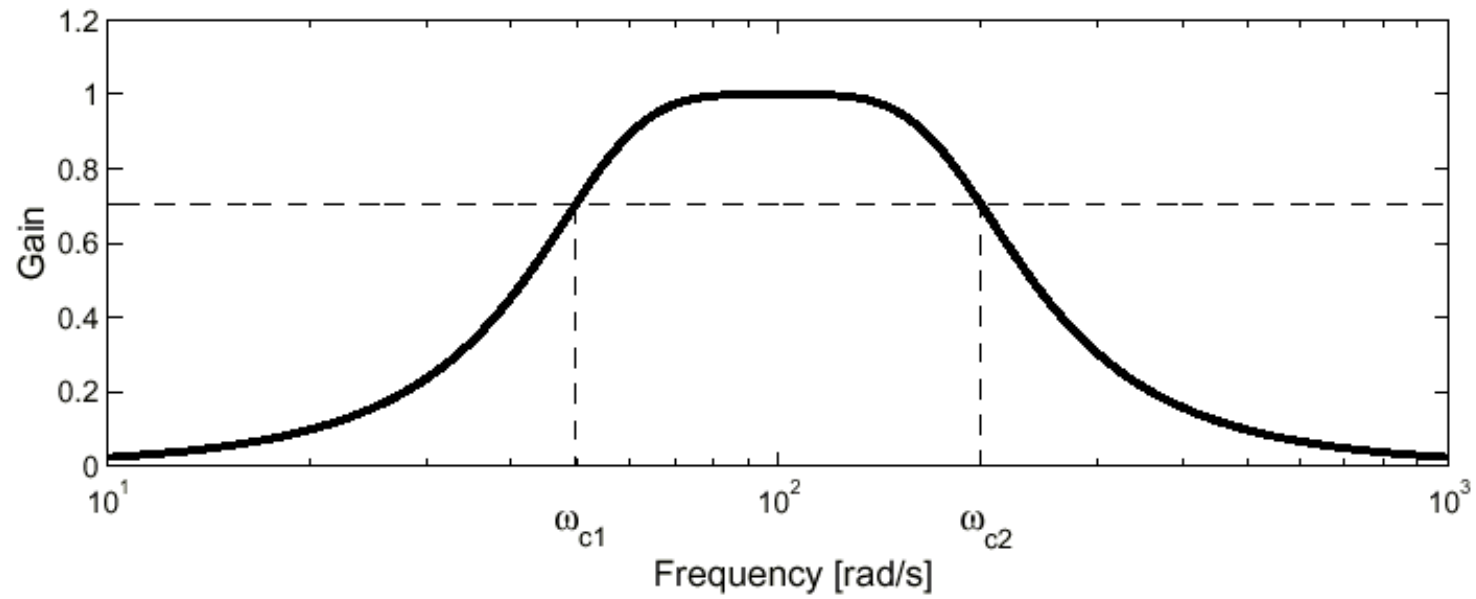
# Filtrado

En un amplificador ideal la respuesta en frecuencia debería ser constante,  $G(j\omega) = K$ ,  $\forall \omega$ , es decir, toda componente de frecuencia debería pasar sin cambio de fase ni distorsión de amplitud.

Definimos:

- **La banda de paso** es el rango de frecuencias sobre el cual la amplificación (o atenuación) es aproximadamente constante, con un corrimiento de fase aproximadamente proporcional a  $\omega$ .
- **la banda de corte** es el rango de frecuencias que son filtradas. En este rango de frecuencias  $|G(j\omega)|$  tiene un valor pequeño comparado con el valor sobre la banda de paso.

- **la(s) banda(s) de transición** son los rangos de frecuencias intermedias entre una banda de paso y una de corte.
  
- **la frecuencia de corte**  $\omega_c$  es el valor de frecuencia tal que  $|G(j\omega)| = \hat{G}/\sqrt{2}$ , donde  $\hat{G}$  es respectivamente
  - $|G(0)|$  para filtros pasa-bajos y corta-bandas,
  - $|G(\infty)|$  para filtros pasa-altos,
  - el máximo valor de  $|G(j\omega)|$  en la banda de paso, para filtros pasa-bandas.
  
- **el ancho de banda**  $B_\omega$  es una medida del rango de frecuencias en la banda de paso (o de corte). Se define como  $B_\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ , donde  $\omega_{c2} > \omega_{c1} \geq 0$ . En esta definición  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  son las frecuencias de corte a cada lado de la banda de paso o de corte. Para filtros pasa-bajos  $\omega_{c1} = 0$ .



Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bandas.

# Resumen

- La **identificación** de sistemas es una disciplina que estudia la obtención experimental de modelos matemáticos de sistemas.
- Sistemas estables que se comportan como sistemas lineales de primer o segundo orden pueden identificarse en forma simple de la respuesta al escalón.
- La **respuesta en régimen permanente** de un sistema estable es la señal a la que tiende la salida una vez extinguidos los transitorios. Típicamente se estudia la respuesta a escalones y a sinusoides.

- La respuesta en régimen permanente de un sistema a sinusoides en un rango de frecuencias es la **respuesta en frecuencia del sistema**. Se basa en la propiedad de los sistemas lineales que responden a sinusoides de entrada con una senoide de igual frecuencia en la salida.
- Los diagramas de Bode grafican magnitud y fase de  $G(j\omega)$ , y representan la respuesta en frecuencia del sistema. Normalmente se grafican en escala logarítmica, lo que permite aproximar en forma sencilla el diagrama a partir de la superposición de asíntotas de la respuesta en frecuencia de los factores en que se descompone la función transferencia considerada.