

7. Limitaciones fundamentales en control SISO

Parte 2

Panorama:

- Perturbaciones
- Limitaciones debidas a errores en modelado
- Limitaciones estructurales
 - retardos de transporte
 - ceros de fase no mínima
 - polos inestables

Resumen de la clase anterior

Vimos en el capítulo anterior cómo sintetizar un controlador dado un modelo nominal de la planta y el conjunto de polos a lazo cerrado deseados.

Resta entonces la cuestión de con qué criterio se deben elegir los polos a lazo cerrado deseados. Lo primero, es analizar cuáles son las **limitaciones fundamentales** al desempeño alcanzable del sistema (qué es lo que se **puede** elegir).

En la clase anterior vimos las limitaciones asociadas a

sensores: ruido, dinámica propia del sensor,

actuadores: restricciones en actuación máxima y mínima.

Estas limitaciones, en general, impondrán un límite superior al máximo ancho de banda de lazo cerrado alcanzable.

Limitaciones debidas a perturbaciones

Otra fuente de limitaciones de desempeño en un lazo de control es la existencia de perturbaciones; señales no deseadas, que no pueden manipularse, y que entran al lazo de control.

Recordando el lazo de control de 1 grado de libertad introducido en el Capítulo 4, las perturbaciones a la entrada y a la salida de la planta afectan a la salida según la fórmula

$$Y(s) = S_{i0}(s)D_i(s) + S_o(s)D_o(s),$$

donde

$$S_{i0}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)K(s)} = G_0(s)S_0(s), \quad S_0(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)K(s)}.$$

Asumiendo que las perturbaciones d_i y d_o sólo son significativas en bandas de frecuencias B_i y B_o respectivamente, será deseable que las magnitudes $|S_{i0}(j\omega)|$ y $|S_o(j\omega)|$ sean pequeñas en las bandas B_i y B_o respectivamente.

Como $G_o(s)$ es fija, lo único que podemos manipular es $S_o(s)$, que deberá ser de forma tal que $|S_o(j\omega)| \approx 0$, en la unión de las bandas B_i y B_o . En otras palabras, $|T_o(j\omega)| \approx 1$ en esas mismas frecuencias.

La existencia de perturbaciones en el lazo de control impondrán, en general, un límite **inferior** en el ancho de banda del sistema a lazo cerrado.

Ejemplo. [Limitaciones debidas a perturbaciones] Sea la planta $G_0(s) = \frac{1}{s}$, controlada con control $K(s) = K_p$. La funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria nominales resultan

$$S_0(s) = \frac{s}{s + K_p}, \quad T_0(s) = \frac{K_p}{s + K_p}.$$

Supongamos que tenemos perturbaciones sinusoidales $d_i = \cos(2\pi t)$ (frecuencia 1 Hz) y $d_o(t) = \sin(10\pi t)$ (frecuencia 5 Hz).

Vemos que para reducir el efecto de estas perturbaciones a la salida de la planta deberemos diseñar K_p para que el ancho de banda de lazo cerrado sea de **por lo menos** 50 Hz.

Podemos lograr este ancho de banda haciendo $K_p \geq 100\pi$, ver Figura 1. Sin embargo, notar que si hubiera ruido de medición de alta frecuencia, o restricciones en la actuación, existirán también límites superiores al máximo valor de K_p .

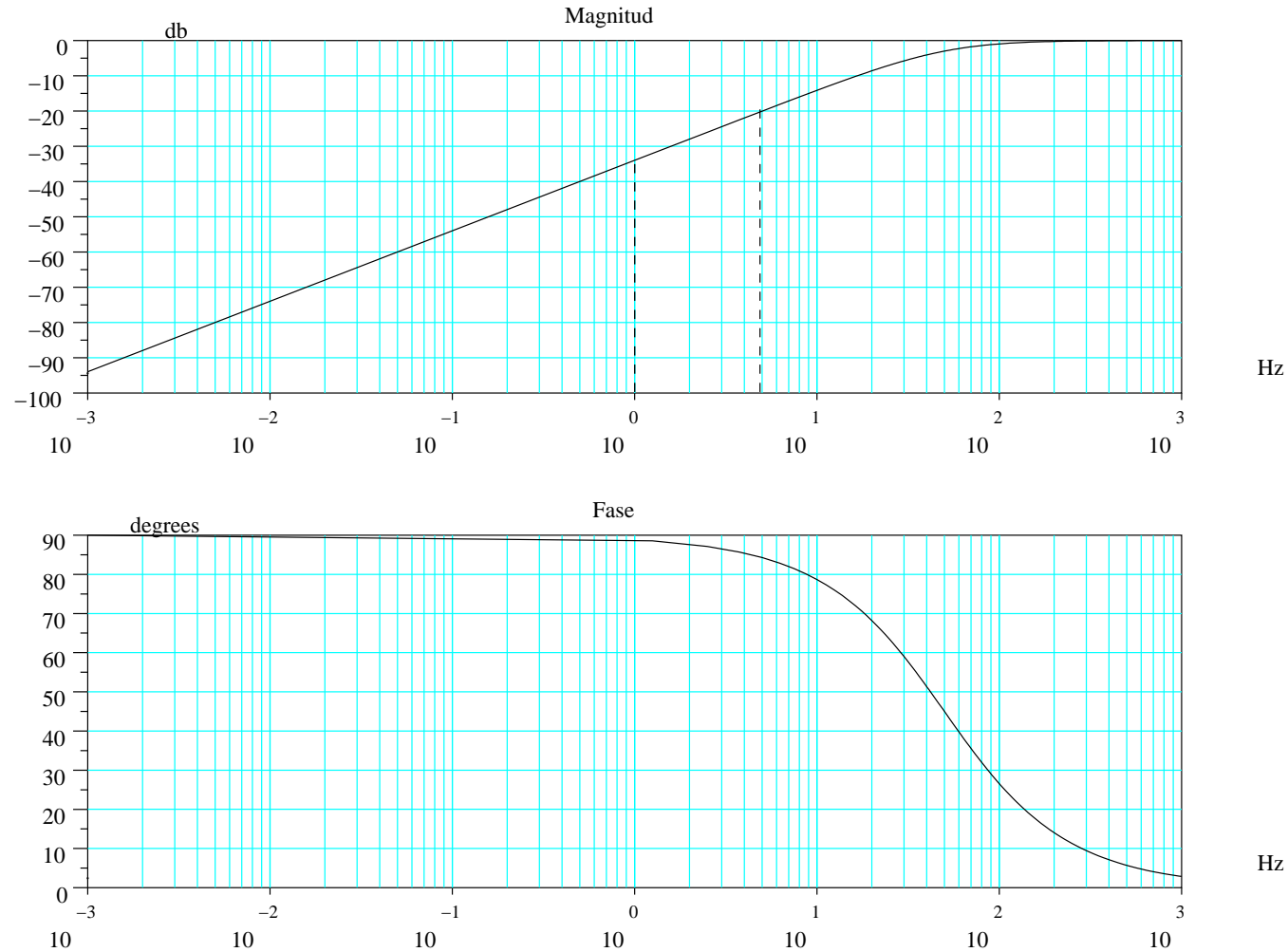


Figura 1: Función de sensibilidad nominal para atenuar las perturbaciones de 1 y 5 Hz ($K_p = 100\pi$)



Errores de modelado

Las incertidumbres en el modelo nominal de la planta también limitan el desempeño alcanzable del sistema. Como viéramos en el Capítulo 4, las funciones de sensibilidad reales diferirán en general de las nominales.

Para un **modelo de error multiplicativo** (MEM) la planta real $G(s)$ se puede expresar en función del modelo nominal $G_0(s)$ como

$$G(s) = G_0(s)(1 + G_\Delta(s)),$$

donde $G_\Delta(s)$ es en general desconocida, aunque puede conocerse alguna cota de su magnitud. Generalmente, la magnitud de $G_\Delta(j\omega)$ crece con la frecuencia — ya que a mayores frecuencias existe mayor incertidumbre en el modelo.

Con este MEM, las funciones de sensibilidad reales alcanzadas con un dado controlador — diseñado en base al modelo nominal de la planta — pueden relacionarse a las nominales. Por ejemplo, como vimos en el Capítulo 4,

$$S(s) = S_0(s)S_{\Delta}(s), \quad T(s) = T_0(s)(1 + G_{\Delta}(s))S_{\Delta}(s),$$

donde

$$S_{\Delta}(s) = \frac{1}{1 + T_0(s)G_{\Delta}(s)}.$$

Para que las funciones de sensibilidad nominales se aproximen a las reales alcanzadas, es deseable que $|S_{\Delta}(j\omega)| \approx 1$ en las frecuencias donde exista incertidumbre.

Esto puede lograrse diseñando $|T_0(j\omega)|$ de forma que sea pequeña donde $|G_{\Delta}(j\omega)|$ sea significativa — generalmente a frecuencias altas \Rightarrow límite superior al ancho de banda de lazo cerrado alcanzable.

En conclusión,

La incertidumbre de modelado generalmente impondrá un límite superior al ancho de banda de lazo cerrado alcanzable.

Ejemplo. [Efecto de errores de modelado] *Supongamos que tenemos un modelo nominal de una planta*

$$G_0(s) = \frac{1}{((a + \delta)s + 1)} F(s)$$

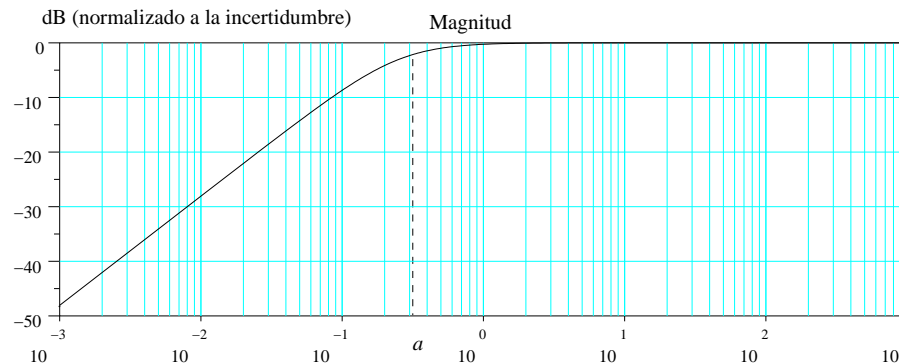
que tiene una incertidumbre δ en el valor exacto de un polo, o sea que la planta real es

$$G(s) = \frac{1}{(as + 1)} F(s).$$

El MEM para esta incertidumbre es

$$G_{\Delta}(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} - 1$$

$$= \frac{\delta s}{(as + 1)}.$$



Este error es más significativo a frecuencias altas, llegando a un valor máximo de magnitud $|\delta/a|$.

El modelo nominal de la planta será fidedigno hasta aproximadamente la frecuencia a del polo incierto. Esta frecuencia será un límite al ancho de banda de lazo cerrado, si queremos evitar los efectos del error en el polo en el lazo real. \square

Limitaciones estructurales

Las limitaciones vistas hasta ahora (debidas a sensores, actuadores, perturbaciones, o errores de modelado) están todas asociadas a la **implementación real** del lazo de control.

Sin embargo, existen limitaciones que se manifiestan **aún en el lazo nominal**. Estas son limitaciones originadas en ciertas **características estructurales** de la planta a lazo abierto.

Analizaremos las limitaciones de desempeño inducidas por

- Retardos de transporte
- Ceros de fase no mínima
- Polos inestables

Plantas con estas características estructurales serán **inherentemente difíciles de controlar satisfactoriamente**.

Retardos de transporte

Sin duda, una de las fuentes más comunes de limitaciones de desempeño. Los retardos de transportes están típicamente asociados al transporte de materiales de un punto a otro.

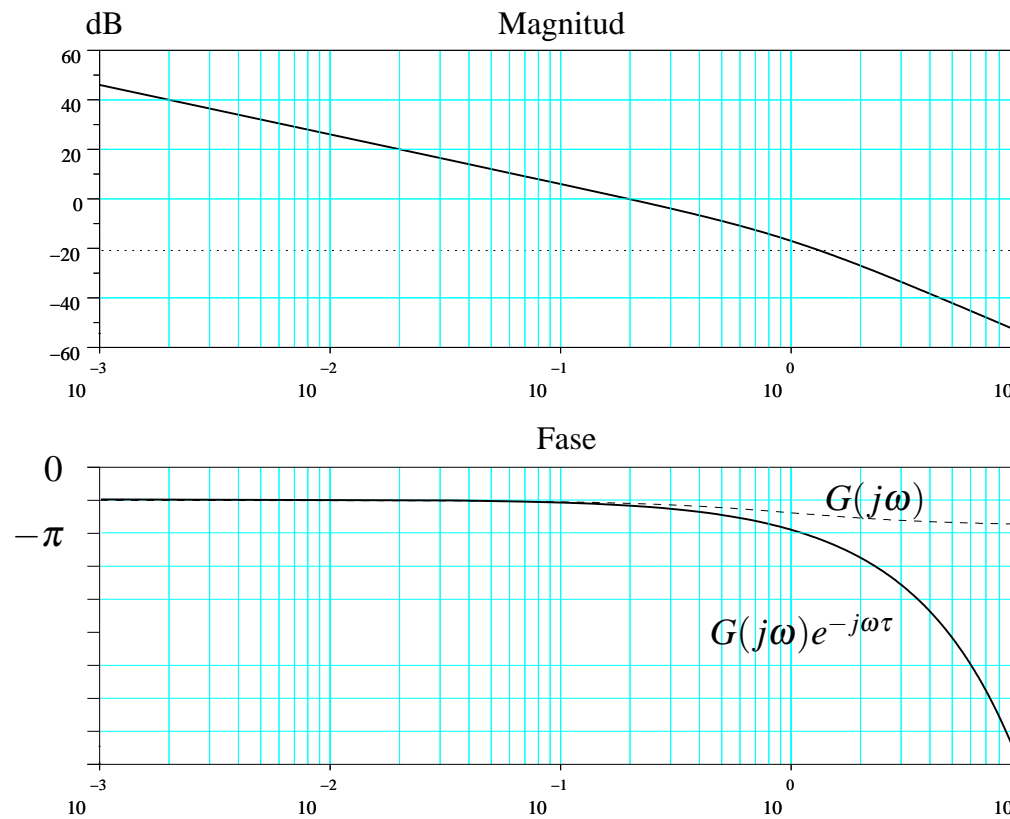
Un retardo en la planta se modela en su función transferencia como $e^{-s\tau}$, donde τ es el retardo. El término $e^{-s\tau}$ no modifica la magnitud de la función transferencia, ya que

$$|e^{-j\omega\tau}| = 1 \quad \forall \omega, \tau,$$

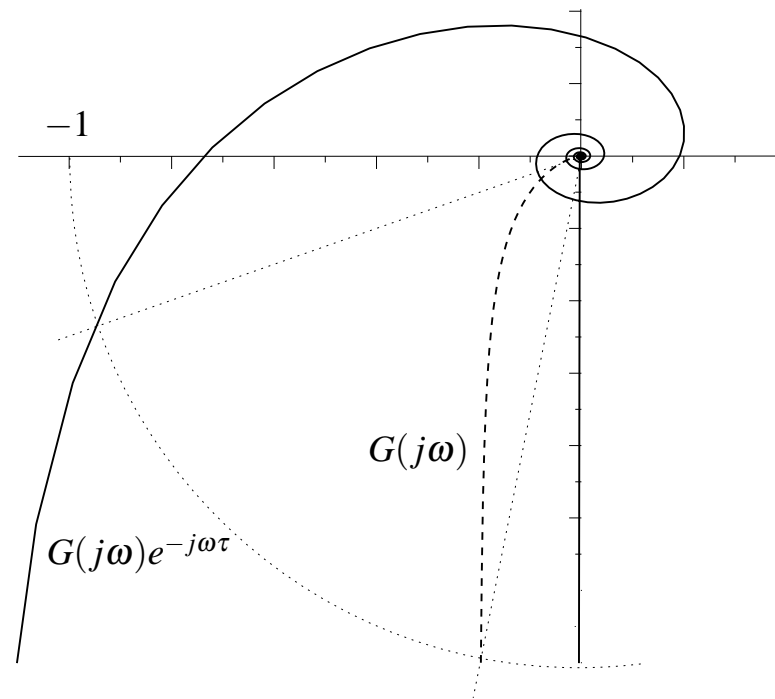
pero agrega un retraso de fase creciente con la frecuencia,

$$\angle e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau.$$

El ancho de banda está dado por la **frecuencia de corte** del sistema (cruce de 0 dB). Aumentando esta frecuencia lo suficiente, se lleva a un sistema con retardo indefectiblemente a la inestabilidad.



Es fácil ver en un diagrama de Nyquist que la presencia de un retardo limita el máximo ancho de banda de lazo cerrado alcanzable. Un ancho de banda mayor requiere mayor ganancia de lazo, pero disminuye los márgenes de estabilidad.



Un retardo de transporte en la planta impondrá un límite superior al máximo ancho de banda de lazo cerrado alcanzable.

Retardos y errores de modelado

En relación a las limitaciones inducidas por los retardos de transporte, cabe preguntarse si vale la pena usar un controlador con **predictor de Smith** en la práctica, ya que es un controlador que **agrega** un retardo al lazo.

La respuesta es posiblemente **sí** si el modelo de la planta (especialmente el retardo) se conocen con precisión.

Sin embargo, si sólo se dispone de una estima muy incierta del retardo, el uso de un predictor de Smith será contraproducente. El error de modelado nos obligará a limitar significativamente el ancho de banda de lazo cerrado, como ilustramos a continuación.

Consideremos una planta $G(s)$ con retardo τ , de la que disponemos un modelo nominal $G_0(s)$. Supongamos que sabemos que la planta tiene un retardo del que sólo conocemos un valor aproximado

$$G(s) = e^{-s\tau}F(s), \quad G_0(s) = e^{-s\tau_0}F(s).$$

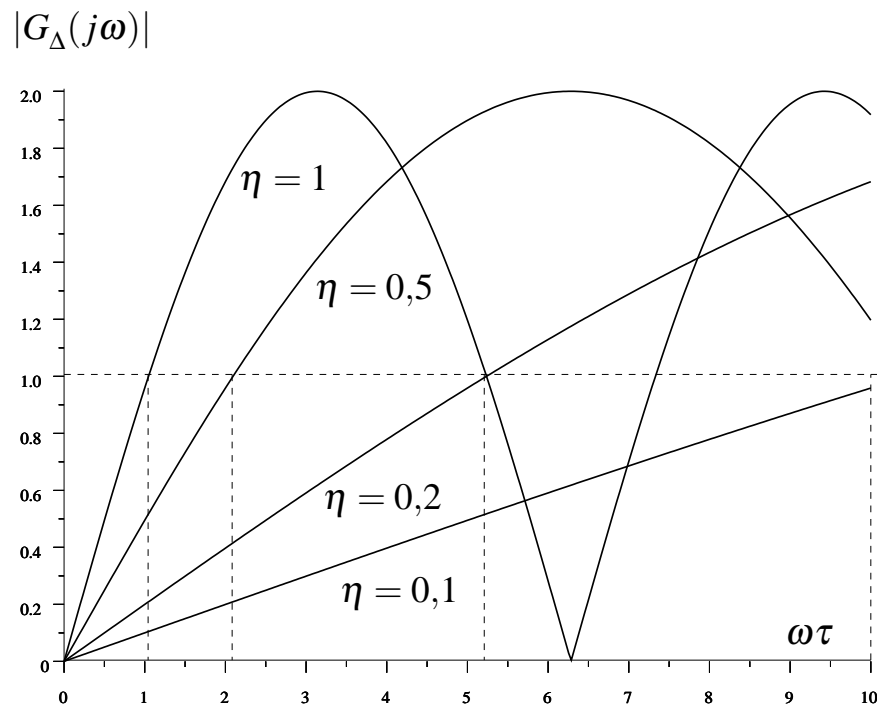
Supongamos que el retardo del modelo nominal τ_0 puede expresarse como $\tau_0 = \tau(1 + \eta)$, donde η representa el error relativo en τ_0 respecto del valor real τ .

La expresión del modelo de error multiplicativo (MEM) $G_\Delta(s)$ en el modelo nominal debido a este error en el retardo (asumiendo que el resto del modelo es aceptablemente preciso) es

$$G_\Delta(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} - 1 = e^{\eta\tau s} - 1.$$

Calculamos la magnitud del MEM para tener una idea de los rangos de frecuencia en los que será más importante,

$$\begin{aligned}
 |G_{\Delta}(j\omega)| &= |e^{j\eta\tau\omega} - 1| \\
 &= \sqrt{(1 - \cos(\eta\tau\omega))^2 + \text{sen}^2(\eta\tau\omega)} \\
 &= 2|\text{sen}(\eta\tau\omega/2)|
 \end{aligned}$$



La figura a la derecha grafica $|G_{\Delta}(j\omega)|$ versus $\omega\tau$ para distintos valores de error relativo η .

La magnitud del error crece rápidamente hasta 2 en un rango de bajas frecuencias. Para mantener $|G_{\Delta}(j\omega)| < 1$ es necesario imponer $\omega < 1/(\eta\tau)$.

Del análisis anterior, concluimos que si el retardo se conoce con un η % de certidumbre, entonces el ancho de banda de lazo cerrado debe limitarse a

$$\omega_{\text{máx}} < \frac{1}{\eta \tau},$$

que podemos considerar como la frecuencia de corte de $T_0(j\omega)$. Por ejemplo, si $\eta = 1/3$ podemos obtener un ancho de banda máximo de aproximadamente $3/\tau$.

Por otro lado, un simple controlador PID puede probablemente alcanzar un ancho de banda $4/\tau$ con una sintonía adecuada, **sin** utilizar un predictor de Smith.

En resumen, el conocimiento preciso del modelo del sistema y el retardo es una condición **sine qua non** para obtener ventajas del predictor de Smith.

Ceros de fase no mínima

Definición. [Sistemas de fase mínima y de fase no mínima]

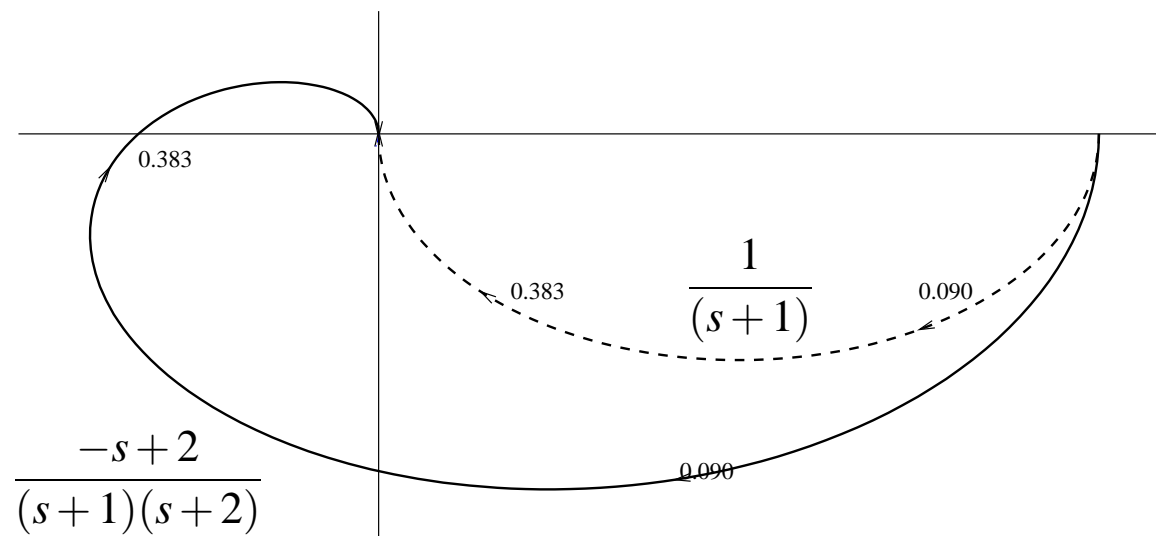
*Un sistema descrito por una función transferencia racional $G(s)$ se dice **de fase mínima** si todos los ceros de $G(s)$ tienen parte real negativa (ceros de fase mínima).*

*Si $G(s)$ tiene al menos un cero con parte real no negativa (cero de fase no mínima), el sistema se dice de **fase no mínima**.*

Los ceros de fase no mínima imponen limitaciones similares a las de un retardo de transporte (aunque comparativamente menos severas). De hecho, los sistemas de fase no mínima son tan comunes como los retardos, ya que un retardo puede aproximarse por

$$e^{-s\tau} \approx \left(\frac{-\tau s + 2k}{\tau s + 2k} \right)^k, k = 1, 2, \dots, \text{ un sistema de fase no mínima.}$$

Respecto a un cero de fase mínima, un cero de igual frecuencia pero de fase no mínima, introduce retardo adicional de fase en el lazo, disminuyendo los márgenes de estabilidad del sistema.



Un cero de fase no mínima en la planta impondrá un límite **superior** al máximo ancho de banda de lazo cerrado alcanzable.

Polos inestables

Los polos inestables son polos de la función transferencia del sistema con **parte real no negativa**.

Los polos inestables, a diferencia de los ceros de fase no mínima, imponen un **límite inferior** al ancho de banda de lazo cerrado. Es decir, requieren una respuesta rápida del sistema para no comprometer el desempeño.

Vamos a demostrar el efecto de los polos inestables a lazo abierto sobre el desempeño del sistema a lazo cerrado en la próxima clase, analizando el desempeño en la respuesta temporal del sistema a lazo cerrado.

Un polo inestable en la planta impondrá un límite **inferior** al ancho de banda de lazo cerrado necesario para un desempeño aceptable.

Conclusiones

Hemos visto los factores más importantes que limitan el desempeño del sistema a lazo cerrado:

- ruido y dinámica en los sensores,
- restricciones en los actuadores,
- perturbaciones a la entrada y a la salida de la planta,
- errores en el modelo nominal,
- limitaciones estructurales en la planta:
 - retardos de transporte,
 - ceros de fase no mínima,
 - polos inestables.

Estos factores imponen limitaciones sobre el ancho de banda a lazo cerrado, restringiendo la velocidad de respuesta y robustez del sistema a lazo cerrado.

- El ruido en los sensores, las limitaciones en los actuadores, los errores de modelado, y los retardos y ceros de fase no mínima de la planta **limitan el máximo valor alcanzable** del ancho de banda a lazo cerrado.
- Las perturbaciones y los polos inestables de la planta **limitan el mínimo valor necesario** del ancho de banda a lazo cerrado.

El conocimiento de los valores **aceptables** de ancho de banda a partir de estas limitaciones es esencial **antes** de encarar el diseño del controlador para un sistema dado.